TENTAMEN MECHANICA AN-1A 20 november 1996 tijd van 14:00 - 17:00 uur

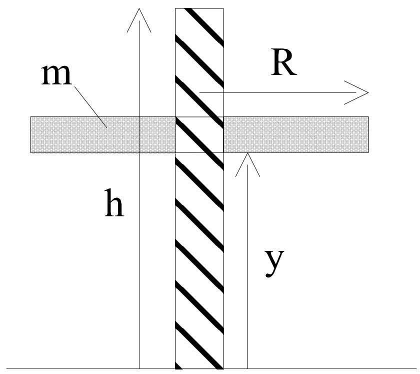
> MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam**.
> Op vel 1: **studentnummer**, **naam**, **adres**, **postkode**, **woonplaats** en **studierichting**.
> De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

cijfer = (Σ punten)/3 + 1

Opgave 1.

Een homogene schijf met een massa m en straal R, heeft in het midden een gat met daarin een schroefgang. De schijf zit om een vertikale staaf met lengte h geschroefd, waar het wrijvingsloos omheen kan bewegen. De schijf wordt van boven af losgelaten. Terwijl de schijf naar beneden zakt, voert deze tegelijkertijd een draaiing uit. Het verband tussen de hoogte y en de hoek θ waarover de schijf gedraaid is, wordt gegeven door:

$$y = h - s.\theta$$



1 a. Geef de potentiële energie van de schijf als functie van θ.

2 b. Bereken de kinetische energie van de roterende schijf als functie van θ.

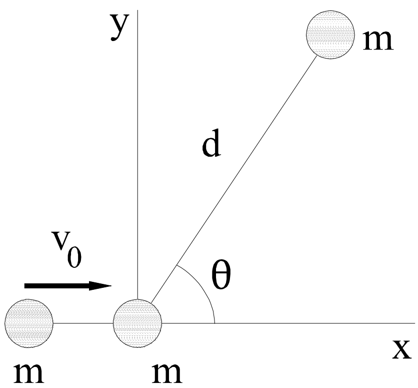
2 c. Leid uit de bewegingsvergelijking de hoekversnelling $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$ af, uitgedrukt in R en s.

3 d. Bereken de snelheid v_y waarmee de schijf de grond raakt.

1 e. Bereken de tijd die de schijf er over doet om beneden te komen.

Opgave 2.

Op een volkomen gladde, horizontale tafel ligt een halter met twee gelijke massa's m, verbonden door een massaloze staaf met een lengte d. Een kogel met massa m en een snelheid $v_0.\vec{e}_x$ wordt onder een hoek θ met de halter tegen één van de massa's geschoten. De botsing is volkomen IN-elastisch (de kogel blijft aan de halter vastzitten).



1 a. Bereken de snelheid van het zwaartepunt van het gehele stelsel van halter en kogel.

1 b. Bereken de positie (x_{CM}, y_{CM}) van het zwaartepunt op het moment van de botsing.

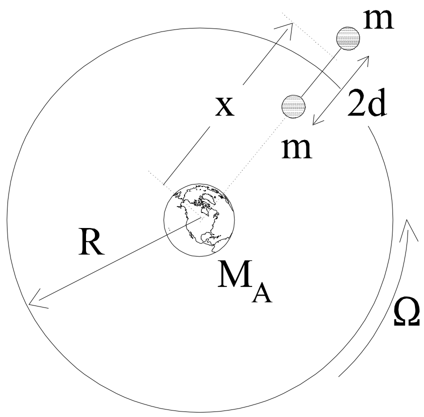
1 c. Bereken de snelheden $\vec{v}_1^{\,/}$, $\vec{v}_2^{\,/}$ en $\vec{v}_3^{\,/}$ van de drie massa's in het zwaartepuntsstelsel vlak voor de botsing.

3 d. Bereken het totale impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt, uitgedrukt in v_0, d en θ.

2 e. Bereken de hoeksnelheid ω van de draaiing van het geheel om het zwaartepunt nà de botsing.

2 f. Bereken het energieverlies ten gevolge van de botsing als functie van θ.

Opgave 3.



Een haltervormige satelliet draait in een cirkelvormige baan met straal R om de aarde met massa M_A. De satelliet bestaat uit twee gelijke massa's m, verbonden door een dunne (massaloze) kabel met lengte $2d$ ($2d \ll R$). Het verlengde van de kabel blijft steeds op het middelpunt van de aarde gericht, zodat de satelliet om de as door het zwaartepunt loodrecht op de halter draait.

2 a <u>Bereken</u> de hoeksnelheid Ω waarmee de satelliet rond de aarde draait, uitgedrukt in R en M_A.

Beschouw een punt dat in het stelsel van de roterende satelliet stil staat op een afstand x van het centrum van de aarde. Veronderstel dat de enige echte kracht in dit punt de zwaartekracht van de aarde is.

2 b. <u>Bereken</u> in het roterende stelsel van de satelliet de versnelling $\vec{a}_r(x)$ als functie van x en uitgedrukt in Ω en R.

Mocht je onderdeel b. niet hebben kunnen beantwoorden, neem dan aan dat de versnelling als functie van x gegeven wordt door:

$$a_r(x) = A\left(x - \frac{R^3}{x^2}\right)$$

Omdat de lengte van de kabel $2d$ veel kleiner is dan R kan de kracht op de buitenste massa benaderd worden door:

$$F(x) = m.\left(\frac{da_r}{dx}\right)\Big|_{x=R}.d$$

2 c. <u>Bereken</u> met deze benadering de kracht op de buitenste massa, uitgedrukt in Ω en d.

De binnenste massa oefent ook een zwaartekracht uit op de buitenste massa.

2 d. <u>Bereken</u> de afstand $2d$ van de twee massa's opdat, in het roterende stelsel, de totale kracht op de buitenste massa nul is.

1a. $U = mgy = mg(h - s.\theta)$

b. $T = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\dot y^2 = \frac{1}{4}mR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ms^2\dot\theta^2 = \frac{1}{2}m(s^2 + \frac{1}{2}R^2)\dot\theta^2$

c. $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = m(s^2 + \frac{1}{2}R^2)\ddot\theta - mgs = 0$ zodat $\ddot\theta = \frac{2gs}{R^2 + 2s^2}$

d. Energie behoud: $\frac{1}{2}(s^2 + \frac{1}{2}R^2)m\dot\theta^2 + mg(h - s\theta) = mgh$

schijf beneden: $h = s\theta \rightarrow \dot\theta^2 = \omega^2 = \frac{4gh}{R^2 + 2s^2}$

zodat $\dot y(y=0) = s\omega = 2s\sqrt{\frac{gh}{R^2 + 2s^2}}$

e. $t = \frac{h}{\langle v_y\rangle} = \frac{h}{\dot y(0)/2} = \frac{h}{s\sqrt{\frac{gh}{R^2 + 2s^2}}} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{h(R^2 + 2s^2)}{g}}$

2a. $\vec V_{CM} = \frac{mv_0.\vec e_x}{3m} = \frac{1}{3}v_0.\vec e_x$

b. $x_{CM} = \frac{1}{3}d\cos\theta$; $y_{CM} = \frac{1}{3}d\sin\theta$

c. $\vec v_1^{\,/} = \frac{2}{3}v_0\vec e_x$; $\vec v_2^{\,/} = -\frac{1}{3}v_0\vec e_x$; $\vec v_3^{\,/} = -\frac{1}{3}v_0\vec e_x$

d. $L = m\frac{2}{3}v_0\frac{d}{3}\sin\theta - m\frac{1}{3}v_0\frac{d}{3}\sin\theta + m\frac{1}{3}v_0\frac{2d}{3}\sin\theta = \frac{1}{3}mdv_0\sin\theta$

e. $I\omega = L \rightarrow \omega = \frac{\frac{1}{3}mdv_0\sin\theta}{(2m(\frac{d}{3})^2 + m(\frac{2d}{3})^2)} = \frac{1}{2}\frac{v_0}{d}\sin\theta$

f.

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}3mv_{CM}^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{3}{2}m(\frac{1}{3}v_0)^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}md^2\frac{1}{4}\frac{v_0^2}{d^2}\sin^2\theta = \frac{1}{12}mv_0^2(4 - \sin^2\theta)$$

3a. $2m\Omega^2R = G\frac{2mM_A}{R^2} \rightarrow \Omega = \sqrt{G\frac{M_A}{R^3}}$

b. $\vec a_r = (\Omega^2x - G\frac{M_A}{x^2})\vec e_x = \Omega^2(x - \frac{R^3}{x^2})\vec e_x$

c. $m.(\frac{da_r}{dx})\Big|_{x=R}.d = m\Omega^2(1 + 2\frac{R^3}{x^3})\Big|_{x=R}.d = 3m\Omega^2 d$

d. $3m\Omega^2 d = G\frac{m^2}{4d^2} \rightarrow d^3 = G\frac{m}{12\Omega^2} = \frac{Gm}{12}\frac{R^3}{GM_A} = R^3.\frac{m}{12M_A}$ dus $2d = R\left(\frac{2m}{3M_A}\right)^{\frac{1}{3}}$